Die Normal- und die Binomialverteilung

Aufgabe 1 Natalie interessiert sich dafür, wie für verschiedene Wahrscheinlichkeiten p die maximalen Werte der Binomialverteilung $B(k;n;p)$ in Abhängigkeit des Umfangs n liegen und ob sich ein Zusammenhang zu p und n erkennen lässt.

a) Berechnen Sie die Werte der Binomialverteilungen für den Fall $n = 16$ und die Wahrscheinlichkeiten $p = 0{,}1, 0{,}2, \dots, 0{,}9$. Stellen Sie für jedes p die Wahrscheinlichkeiten $B(k;n;p)$ in Abhängigkeit von k graphisch dar und sehen Sie sich die Maxima für verschiedene Wahrscheinlichkeiten an.

b) Berechnen Sie für alle Wahrscheinlichkeiten p die Maxima der einzelnen Verteilungen und die Quotienten des Maximums aus Teil a) und der Standardabweichung. Deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Verteilung der Maxima von $B(k;n;p)$ gut durch $\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}$ genähert werden kann.

Aufgabe 3 Zeichnen Sie unter Statistik ein Histogramm der Binomialverteilung $B(k;n;0{,}2)$ für $n = 10$.

Hinweis. Definieren Sie eine Funktion f_n mit

$$f_n(k,n) = B(k;n;p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{für } p = 0{,}2.$$

Aufgabe 4 Die Mitten aufeinander folgender oberer Grenzstrecken eines Histogramms sollen durch gerade Strecken miteinander verbunden werden.

a) Zeigen Sie an einer Skizze, dass diese Trapeze den Flächeninhalt $\frac{f_n(k)+f_n(k-1)}{2}$ haben.

b) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Histogramms und der Trapeze.

c) Wie verändert sich die Summe der Flächeninhalte der Trapeze mit wachsendem n?

Bei der Berechnung der letzten Aufgabe wird deutlich, dass die Näherung der Wahrscheinlichkeitsberechnung durch Trapeze für größeres n immer genauer wird und durch den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen beschrieben wird.

Kann man den Sekantenverlauf durch eine stetig integrierbare Funktion nähern, so lässt die Wahrscheinlichkeit sich näherungsweise mithilfe eines Integrals berechnen. Dazu ist es hilfreich, die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung so zu „verschieben“, dass sie symmetrisch zur y-Achse liegen. Dies ist der Inhalt der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 5 Wir untersuchen die Maxima der Verteilungen $B(k;n;\frac{1}{2})$ für $n = 10$ und $n = 20$. σ ist ihre Standardabweichung.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ der Binomialverteilungen. Definieren Sie die Funktion f_n mit
$$f_n(k;n) = B\left(k+\mu;n;\tfrac{1}{2}\right).$$
Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f_n. Betrachten Sie ihren Graphen und beschreiben Sie die Unterschiede zur Binomialverteilung.

b) Zeichnen Sie ein Histogramm zu $\varphi(k) = \sigma \cdot B(k;n;\frac{1}{2})$ für $n = 10$. Berechnen Sie den Erwartungswert von φ.

c) Der Flächeninhalt des Histogramms gibt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses wieder. Berechnen Sie die Flächeninhalte, und verändern Sie die Breite der Blöcke im Histogramm so, dass die Summe der Flächeninhalte der Blöcke im Histogramm gleich 1 ist.

Aufgabe 6 In der letzten Aufgabe haben wir ein Histogramm mit Blöcken der Breite $\sigma \cdot B(k;n;\frac{1}{2})$ untersucht. Daher definieren wir
$$\varphi_n(k) = \sigma \cdot B(k;n;p).$$
Der Flächeninhalt des Histogramm soll näherungsweise mithilfe von Trapezen berechnet werden.

a) Zeigen Sie, dass die Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Sekante an das Histogramm im Intervall von $\varphi_n(k)$ bis $\varphi_n(k+1)$ gleich $\sigma^2 \cdot B(k+1;n;p) - \sigma^2 \cdot B(k;n;p)$ ist.
Berechnen Sie $B(k;n+1;p) - B(k;n;p)$ für verschiedene n, k und p. Schließen Sie hiermit auf $\lim\limits_{n\to\infty}(B(k;n+1;p) - B(k;n;p))$.

b) Zeigen Sie, dass gilt: $B(k+1;n;p) - B(k;n;p) = B(k;n;p) \cdot \frac{(n+1)\cdot p-k-1}{(k+1)(1-p)}$. Folgern Sie daraus
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(n+1)\cdot p - k - 1}{(k+1)(1-p)} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}. \cdot \big(\sigma \cdot B(k;n;p)\big).$$

> **Hinweis.** Benutzen Sie die Definition von $B(k;n;p)$ mithilfe der Binomialkoeffizienten und $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

c) Berechnen Sie im Fall $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ jeweils für $k \in \{0, 10, \ldots, n\}$ die Werte
$$\frac{(n+1)\cdot p - k - 1}{(k+1)(1-p)} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$
Deuten Sie das Ergebnis und begründen Sie, dass zwischen der Funktion $\varphi = \lim_{n\to\infty} = \varphi_n$ und ihrer Ableitung φ' der folgende Zusammenhang herrscht:
$$\varphi'(x) = -x \cdot \varphi(x).$$

d) Lösen Sie die Differentialgleichung (DGL) aus Teil c) mit dem ClassPad.

> **Hinweis.** Benutzen Sie hierfür den Befehl dSlv unter
> Main → Math3 → dSlv.

e) Bestimmen Sie die Konstante der Lösung der DGL aus Teil d).